Deux exemples d'exercices posés à l'oral d'informatique du concours 2003

juillet 2003

Exercice 1 : Palindromes

On considère un alphabet fini $\Sigma = \{a, b, \ldots\}$. Un mot $w \in \Sigma^*$ est un *palindrome* si il coïncide avec son image miroir, comme p.ex. les mots « abba », « rotor », ou aussi ϵ (le mot vide).

Questions

1. Le langage des palindromes de Σ^* est-il *régulier* (on dit aussi *rationnel*, ou *reconnaissable*) ? Justifiez.
2. Pour un automate fini A, on note $L(A)$ le langage reconnu par A. Proposez un algorithme qui, pour un automate (en général non-déterministe) A, dit si $L(A)$ contient au moins un palindrome. Évaluez la complexité de votre algorithme en fonction de la taille de A (à définir).
3. Soit A un automate à n états. Montrez que si $L(A)$ contient un palindrome, alors il contient un palindrome de longueur inférieure à $2n^2$. Cette borne supérieure peut elle être améliorée de façon significative ?

Exercice 2 : ab/bba

On considère un mot w sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, c'est-à-dire que w est une suite finie $w = (x_1, \ldots, x_n)$ où chaque x_i est une lettre 'a' ou 'b'.
On applique à w le procédé itératif suivant :
1 : si on trouve la sous-suite $a.b$ dans w, alors on la remplace par $b.b.a$ et on recommence en **1**.
2 : sinon on stoppe.

P.ex. si w est $a.b.a.a.b$, la première étape du procédé peut le transformer en $a.b.a.b.b.a$. Mais on peut aussi choisir de le transformer en $b.b.a.a.a.b$. On notera $w \rightsquigarrow w'$ quand il est possible de transformer w en w' en une étape. Le procédé enchaîne de telles étapes tant que c'est possible.

Questions

1. Est ce que le procédé termine toujours, quelque soit le mot w_0 de départ ?
2. Pour w_0 donné, le procédé termine au bout de combien d'itérations ?
3. Répondre à nouveau à la question 2 en considérant cette fois ci que $a.b$ est remplacé par $b.b.a.a$.